Chapitre 4 : Systèmes Numériques

John Klein

Université de Lille - CRIStAL UMR CNRS 9189

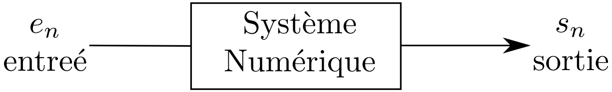


FIGURE – Vue schématique « entrée / sortie »d'un système numérique.

Quel impact du passage au numérique sur la modélsation des systèmes ? :

- Les résultats établis dans le chapitre 2 sont-ils conservés après échantillonnage ?
- La fonction de transfert dans le domaine de Laplace ou de Fourier est-elle toujours un outil de représentation aussi efficace ?

Le but du chapitre est de répondre à ces interrogations.

Plan du chapitre

- Un système régi par une équation différentielle est l'archétype du système de convolution.
- Ces équations font intervenir des dérivées de signaux.
- Pour un signal analogique $x(t)$, on approxime sa dérivée en numérique par :
$$\frac{x_n - x_{n-1}}{T_e} \approx x'(t), \tag{1}$$
quand $t = nT_e$.
- En itérant, on approxime sa dérivée $m^{\text{ième}}$ en numérique par :
$$\begin{aligned} x^{(m)}(t) &\approx \frac{x_n^{(m-1)} - x_{n-1}^{(m-1)}}{T_e}, \\ &\approx \frac{x_n^{(m-2)} - 2x_{n-1}^{(m-2)} + x_{n-2}^{(m-2)}}{T_e^2}, \\ &\approx \frac{1}{T_e^m} \sum_{i=0}^{m} \binom{i}{m} (-1)^i x_{n-i}. \end{aligned} \tag{2}$$

- Considérons une équation différentielle générique :

$$a_p s^{(p)}(t) + \ldots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \ldots + b_1 e'(t) + b_0 e(t).$$

- En utilisant les approximations précédentes, le passage au numérique produit l'équation suivante :

$$\alpha_p s_{n-p} + \ldots + \alpha_1 s_{n-1} + \alpha_0 s_n = \beta_m e_{n-m} + \ldots + \beta_1 e_{n-1} + \beta_0 e_n,$$

  avec $\alpha_i = \sum_{k=i}^{p} \binom{k}{p} \frac{a_k}{T_e^k}$ et $\beta_i = \sum_{k=i}^{m} \binom{k}{m} \frac{b_k}{T_e^k}$.

- Cette équation est appelée équation aux différences et est un système numérique.

Equation aux différences :

- Les systèmes régis par des équations aux différences sont toujours des systèmes de convolution.
- On conserve la propriété fondamentale suivante :

Propriété

Soit un système de convolution numérique (ou filtre numérique) dont la réponse impulsionnelle [a] est notée h_n. Soit e_n un signal d'entrée quelconque et s_n sa sortie. On a alors :

$$\begin{aligned} s_n &= \{h \star e\}_n \,, & (3) \\ \Leftrightarrow s_n &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e_{n-i} h_i \,. & (4) \end{aligned}$$

a. La définition de la réponse impulsionnelle reste inchangée en numérique. Il s'agit de la sortie produite quand l'entrée est l'impulsion de Dirac δ_n.

Catégories de filtres numériques :

Définition

On appelle **filtre à réponse impulsionnelle finie** (RIF) tout filtre numérique tel que sa réponse impulsionnelle h_n est non-nulle pour un nombre fini de valeur de n. Autrement dit, il existe un certain entier M au delà duquel $h_n = 0$, $\forall n \geq M$.

- Quand l'équation aux différences est telle que tous les coefficients α_i sont nuls sauf α_0, on tombe sur filtre RIF causal avec en particulier :

$$h_i = \begin{cases} \frac{\beta_i}{\alpha_0} \text{ si } 0 \leq i \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} . \tag{5}$$

Catégories de filtres numériques :

Définition

On appelle **filtre à réponse impulsionnelle infinie** (RII) tout filtre numérique tel que sa réponse impulsionnelle h_n est non-nulle pour un nombre infini de valeur de n.

- Infinité de valeurs non nulles $\rightarrow$ peu évident à calculer en pratique.

Attention

Chez certains auteurs, filtres RII = filtres récursifs.
Un filtre est récursif, si il existe un $\alpha_i \neq 0$ en plus de α_1.

- Quand le calcul de la valeur actuelle de la sortie y_n dépend d'au moins une de ses valeurs passées y_{n-i}, on obtient le plus souvent un filtre RII.

Plan du chapitre

Vers un modèle efficace de filtre numérique :

- Peut-on utiliser la transformée de Laplace sur un filtre numérique x_n ?
- Oui mais à condition de l'appliquer au signal échantillonné $x_e(t)$ défini en tout t :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x_e\}(p) &= \int_0^{+\infty} x_e(t)\, e^{-pt} dt, \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\,\delta(t-kT_e)\, e^{-pt} dt, \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT_e)\, e^{-pkT_e}, \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e^{-pkT_e}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Vers un modèle efficace de filtre numérique :

- Une fonction de transfert de filtre numérique n'aura pas une expression simple en Laplace à cause des exponentielles.
- En posant le changement de variable $z = e^{pT_e}$, on reconnaît un objet mathématique appelé *série entière*. Cet objet offre alors une nouvelle représentation du signal qu'on qualifie de transformée en Z :

Définition

Soit x_k un signal numérique. Soit $z \in \mathbb{C}$ une variable complexe. On appelle **Transformée en Z** de x_k la fonction notée $X(z)$ telle que :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k}. \tag{7}$$

On note $\mathcal{Z}$ l'opérateur qui à x_k associe $X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\}(z)$. Cette définition est parfois étendue pour les k négatifs.

Transformée en Z :

La TZ est très liée à la transformée de Laplace mais présente les avantages suivants :

- une écriture des résultats plus concise et ne faisant plus apparaître le paramètre T_e. En effet, le rôle du paramètre T_e est excessivement important lors de l'échantillonnage mais une fois celui-ci terminé, il ne sera plus spécialement influent.
- une équivalence formelle avec les séries entières qui ont fait l'objet de nombreux développements mathématiques que l'on va pouvoir exploiter.

Transformée en Z :

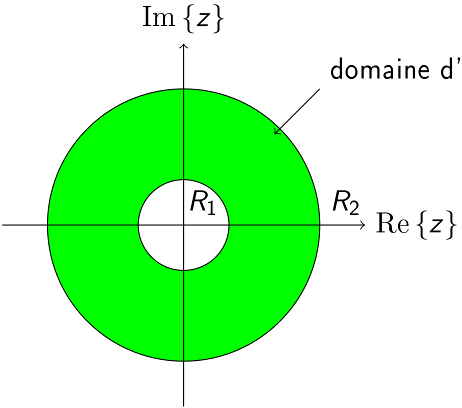
- La transformée en Z notée $X(z)$ n'est pas forcément définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il y a même des cas où elle n'est définie nulle part.
- On sait que le domaine de définition d'une transformée en Z est dépend de valeurs-frontière pour le module $|z|$. Ces bornes sont appelées rayons :

Propriété

Soit $X(z)$ la transformée en Z de la suite x_n. Pour toute transformée en Z définie sur un ensemble non vide, il existe un couple de réels $(R_1, R_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_1 \leq R_2$ et $X(z)$ est définie pour tout z tel que $R_1 \leq |z| \leq R_2$.

Transformée en Z :

- Le domaine d'existence d'une transformée en Z dans le cas le plus courant où $0 < R_1 < R_2 < +\infty$ a l'allure suivante :



- Quand le signal x_n est causal alors on a $R_2 = +\infty$.

Transformée en Z : propriétés

- Linéarité : $\mathcal{Z}\left\{ax_n + by_n\right\} = a\mathcal{Z}\left\{x_n\right\} + b\mathcal{Z}\left\{y_n\right\}$,
- Retard : $\mathcal{Z}\left\{x_{n-k}\right\} = z^{-k}\mathcal{Z}\left\{x_n\right\}$,
- Modulation : $\mathcal{Z}\left\{a^n x_n\right\}(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$,
- Dérivation : $\mathcal{Z}\left\{nx_n\right\}(z) = -zX'(z)$,
- Symétrie : $\mathcal{Z}\left\{x_{-n}\right\}(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$,
- Valeur intiale : $\lim\limits_{|z|\longrightarrow+\infty} X(z) = x_0$,
- Valeur finale : $\lim\limits_{|z|\longrightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n$,
- Convolution : $\mathcal{Z}\left\{x_n \star y_n\right\} = \mathcal{Z}\left\{x_n\right\} \times \mathcal{Z}\left\{y_n\right\}$.

Transformée en Z : propriétés

- Ces propriétés sont valables en des valeurs de z pour lesquelles tous les termes utilisés sont définis.
- Par exemple, si on note $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$ les domaines d'existence de $X(z)$ et $Y(z)$ et que $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y = \emptyset$ alors dans ce cas la proriété de linéarité n'a pas de sens.

Plan du chapitre

- Appliquons la TZ à la forme générale de l'équation aux différences :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{p} \alpha_i s_{n-i}\right\} &= \mathcal{Z}\left\{\sum_{j=0}^{m} \beta_j e_{n-j}\right\}, \\
\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \mathcal{Z}\left\{s_{n-i}\right\} &= \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mathcal{Z}\left\{e_{n-j}\right\}, \\
\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p} \alpha_i z^{-i} S(z) &= \sum_{j=0}^{m} \beta_j z^{-j} E(z), \\
\Leftrightarrow S(z) \sum_{i=0}^{p} \alpha_i z^{-i} &= E(z) \sum_{j=0}^{m} \beta_j z^{-j}.
\end{aligned}
$$

- En définissant la fonction de transfert $H(z)$ du système numérique comme étant le rapport de la sortie sur l'entrée, on retrouve une forme habituelle de fraction rationnelle :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{S(z)}{E(z)}, \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{m} \beta_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{p} \alpha_i z^{-i}}. \end{aligned} \tag{8}$$

- On notera bien que les puissances de z sont négatives.

Fonction de transfert pour un filtre numérique :

- La fonction de transfert en Z est plus générale que celle dans le domaine fréquentiel qui s'obtient par le changement de variable $z = e^{2i\pi f T_e}$:

$$H(f) = H(z)\left|_{z=e^{2i\pi f T_e}}\right. . \tag{9}$$

- La fonction $H(f)$ n'est pas numérique ! Logique ? Problématique ?
  - Un filtre numérique doit fonctionner indépendemment de la façon dont un signal d'entrée e_n a été échantillonné. Il est donc normal que T_e et N ne soient pas des paramètres d'influence pour $H(f)$.
  - $H(f)$ représente le comportement du système numérique en fréquentiel dans le cas général.
  - $H(f)$ ne peut être manipulée par un ordinateur. Pour effectuer un filtrage côté fréquentiel, il suffit de prendre $H_m = H\left(m\frac{F_e}{N}\right)$ et de procéder à une multiplication point par point avec $E_m = \mathcal{TFD}\{e_n\}$.

Fonction de transfert pour un filtre numérique :

- Pour filtrer, on a donc le choix entre les deux chemins suivants :

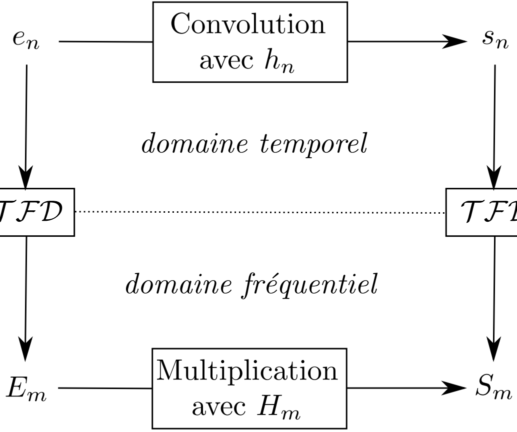
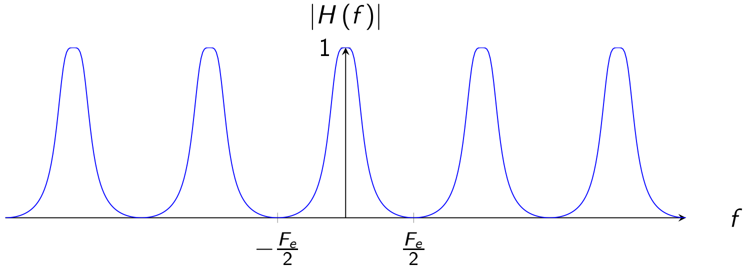


FIGURE – Lien « entrée / sortie » côté temporel ou côté fréquentiel.

Fonction de transfert pour un filtre numérique :

- La transformée en Z encode l'échantillonnage sous-jacent qui impose une réplique du spectre tous les multiples de F_e.
- La fonction $H(f)$ est donc périodique de période F_e. Exemple pour un passe-bas :

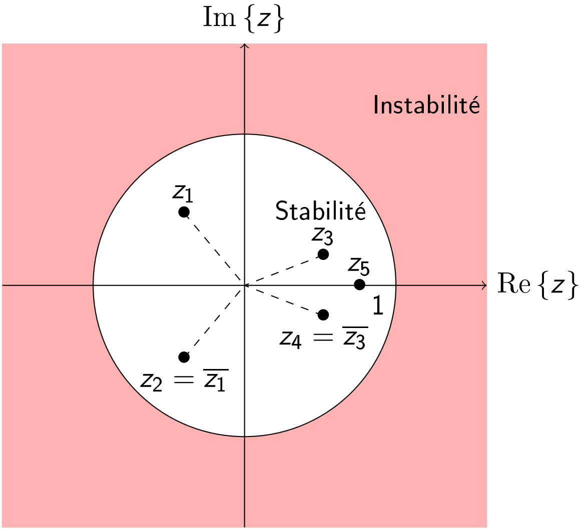


- Chaque réplique de la fonction de transfert va filter chaque réplique du signal d'entrée.

Fonction de transfert numérique : stabilité

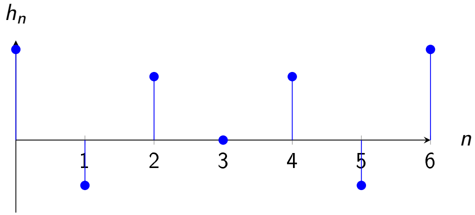
- La définition de la stabilité pour un système numérique est identique au cas analogique.
- Un filtre numérique type fraction rationnelle est stable si tous les pôles de la fonction de transfert $H(z)$ sont dans le cercle unité. Si on note z_i les pôles de $H(z)$, on a $|z_i| < 1$ (inégalité stricte) pour tout i.
- Tous les filtres RIF sont stables.

Fonction de transfert numérique : stabilité



Fonction de transfert numérique : phase linéaire

- Un filtre RIF causal est à phase linéraire si il y a une symétrie (ou une anti-symétrie) dans la suite h_n correspondant à la réponse impulsionnelle du filtre. Comme le filtre est RIF, on sait qu'il existe N tel que $h_N > 0$ et $h_n = 0$ pour tout $n > N$. La phase sera linéraire si on a $h_{n+i} = h_{N-i}$ pour tout i entre 0 et N. Pour illustration, la réponse impulsionnelle suivante satisfait cette condition :



- Aucun RII ne peut être à phase linéraire.

Plan du chapitre

1. Généralités
2. Equation aux différences
   - Transformée en Z
3. Systèmes de convolution numériques
   - Fonction de transfert en Z des filtres numériques
   - Synthèse de filtres numériques

Synthèse de filtres numériques :

- Pour fabriquer aisément un filtre numérique, il faut obtenir sa fonction de transfert en Z.
- Nous supposons partir d'un cahier des charges similaire au cas analogique et exprimé sous forme d'un gabarit.
- Comme en analogique, on se focalise sur la synthèse de passe-bas.
- On donne deux méthodes de synthèse de RIF et deux autres pour les RII.
- Pour les RIF, connaître $H(z)$ est équivalent à connaître h_n.

Méthode de la fenêtre (RIF) :

1. Restreindre le gabarit à l'intervalle des fréquences $\left[-\frac{F_e}{2};\frac{F_e}{2}\right]$. En effet, nous obtiendrons à la fin une réponse impulsionnelle h_n qui est supposé résulter de l'échantillonnage d'une réponse continue $h(t)$.
2. Trouver une fonction continue $H_{gab}(f)$ qui satisfait le gabarit à l'aide d'une approche vue au chapitre 2.
3. Calculer la transformée de Fourier inverse de $H_{gab}(f)$ pour obtenir une réponse impusionnelle continue $h_{gab}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{gab}\}(t)$. On multipliera de plus $h_{gab}(t)$ par la constante T_e.
4. Echantillonner $h_{gab}(t)$ au pas de T_e symétriquement autour de zéro de sorte à obtenir N échantillons $\tilde{h}_n$.
5. (optionnel) Fenêtrer par une fonction de pondération w_n pour atténuer « l'effet mesure ».

Méthode de la fenêtre :

6. Décaler la réponse de sorte à la rendre causale $h_n = \tilde{h}_{n-k}$ avec k la partie entière de $\frac{N}{2}$.
7. Vérifier que le gabarit est respecté en calculant $H_m = \mathcal{TFD}\{h_n\}$.

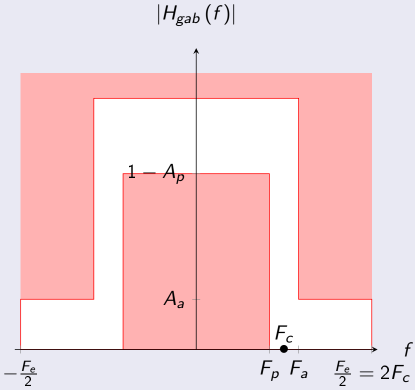
\+ Avantage : grâce à l'étape 6, le filtre obtenu est causal. Comme l'échantillonnage de l'étape 4 est symétrique le filtre est à déphasage linéaire.

− Inconvénient : cette méthode nécessite le calcul explicite de $h_{gab}(t)$ (rarement disponible). A cause de l'étape 6, le filtre a un régime transitoire potentiellement long.

Exemple

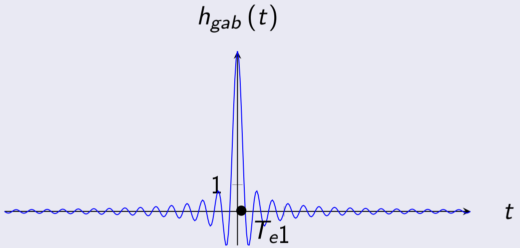
Pour un gabarit de départ identique à celui vu au chapitre 2 :

- Pour la 1ère étape, il faut anticiper des problèmes de recouvrement car nous allons échantillonner à l'étape 4. La fréquence maximale de la fonction de transfert est la fréquence de coupure F_c d'où $F_e > 2F_c$ (Shannon). Choisissions par exemple $F_e = 4F_c$ et $F_c = \frac{F_p+F_a}{2}$:



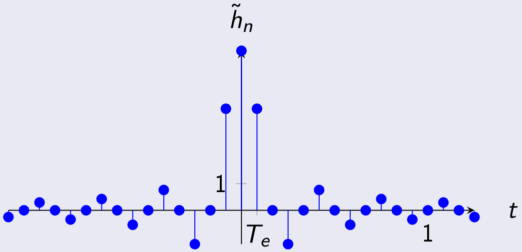
Exemple

- Pour la 2ème étape, nous avons tout intérêt à choisir un filtre idéal : $H_{gab}(f) = \Pi_{[-F_c;F_c]}(f)$. Ce choix va faciliter l'étape suivante et on sait qu'il n'y a pas meilleur choix.
- Pour la 3ème étape, il a été vu que si $H_{gab}(f) = \Pi_{[-F_c;F_c]}(f)$ alors $h_{gab}(t) = 2Fc\,\mathrm{sinc}(2\pi F_c t)$. On donne ci-après le tracé de cette fonction :



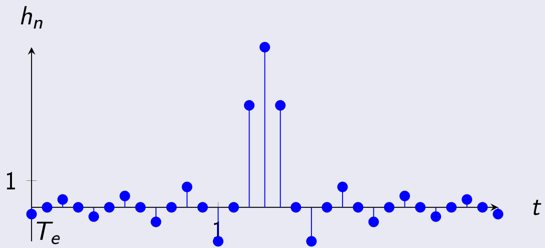
Exemple

- Pour la 4ème étape, il est plus commode de choisir N impair, prenons par exemple $N = 31$. On conservera donc les échantillons suivants : $\left\{\tilde{h}_{-15} = T_e h_{gab}\left(-15\,T_e\right), ..., \tilde{h}_{15} = T_e h_{gab}\left(15\,T_e\right)\right\}$. Le signal numérique $\tilde{h}_n$ est alors donné par le graphique suivant :



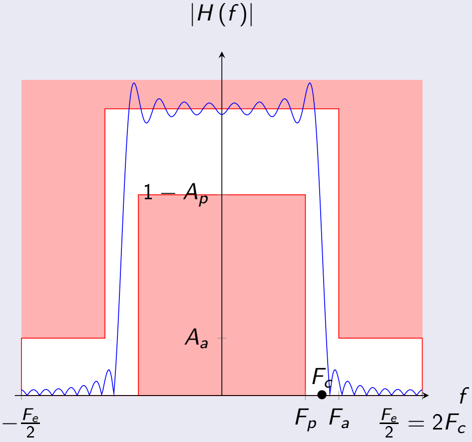
Exemple

- On passe la 5ème étape pour arriver à la 6ème, où il suffit de poser $\left\{ h_0 = \tilde{h}_{-15}, ..., h_{30} = \tilde{h}_{15} \right\}$ car la partie entière de $\frac{N}{2}$ vaut ici 30. Le signal numérique h_n est alors donné par le graphique suivant :



Exemple

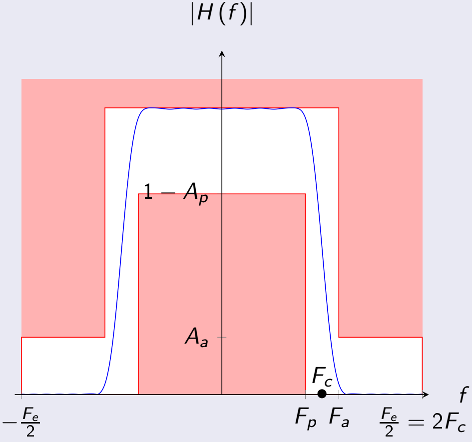
- Pour la 7ème étape, on vérifie si la TFD de h_n respecte le gabarit :



La fréquence de coupure est bien localisée mais la fonction de transfert déborde du gabarit à cause oscillations en bande passante.

Exemple

- Le choix $N = 31$ revient à multiplier $h_{gab}(t)$ par la porte temporelle assez étroite $\Pi_{[0;30T_e]}(t)$. Côté fréquentiel, on récolte donc une convolution avec un sinus cardinal ce qui se traduit par ces oscillations parasites. Rajoutons l'étape 5 :



Remarque

En ayant choisi $N = 31$, la TFD ne peut donner que 31 valeurs spectrales H_m équi-réparties entre 0 et F_e. La qualité du dessin devrait donc être beacoup plus approximative. Deux solutions sont possibles pour augmenter artificiellement la résolution fréquentielle d'une fonction de transfert numérique :

- la première consiste à rajouter des zéros à la suite $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$. On parle de zero-padding. La TFD fournira alors autant de valeurs spectrales supplémentaires qu'on a rajouté de zéros.
- la deuxième consiste à échantillonner la fonction de transfert $H(z)$ obtenue par changement de variable à partir de $H(z)$.

Attention ! Dans les deux cas, cela permet seulement d'avoir un tracé plus complet mais cela ne gomme absolument pas « l'effet mesure ». C'est bien pour cela qu'on observe des oscillations quand l'étape 5 n'est pas effectuée.

Méthode de discrétisation en fréquences (RIF) :

1. Restreindre le gabarit à l'intervalle des fréquences $\left[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}\right]$ (même explication que la méthode précédente).
2. Trouver une fonction continue $H_{gab}(f)$ qui satisfait le gabarit à l'aide d'une approche vue au chapitre 2.
3. Discrétiser la fonction $H_{gab}(f)$ à la même résolution que la TFD, *i.e.* $\frac{F_e}{N}$ situés sur l'intervalle $[0; F_e]$.
4. Conserver les N échantillons $H_m = F_e \times H_{gab}\left(m\frac{F_e}{N}\right)$.
5. Appliquer la TFD inverse pour obtenir $h_n = \mathcal{TFD}^{-1}\left\{H_m\right\}$.

Méthode de discrétisation en fréquences :

+ Avantage : la méthode est simple à mettre en oeuvre et on a l'assurance de respecter le gabarit.
− Inconvénient : on ne sait pas si le filtre est causal ou à phase linéaire.

Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle (RII) :

1. Restreindre le gabarit à l'intervalle des fréquences $\left[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}\right]$ (même explication que la méthode précédente).
2. Trouver une fonction continue $H_{gab}(p)$ (domaine de Laplace) qui satisfait le gabarit et qui est une fraction rationnelle à l'aide d'une approche vue au chapitre 2.
3. Décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples : $H_{gab}(p) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{p-p_i}$ avec les $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ les pôles complexes de la fonction de transferts et les $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ des constantes complexes.
4. Obtenir la fonction de transfert dans le domaine Z par changement de variable : $H(z) = T_e \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{1-e^{p_i T_e} z^{-1}}$.

Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

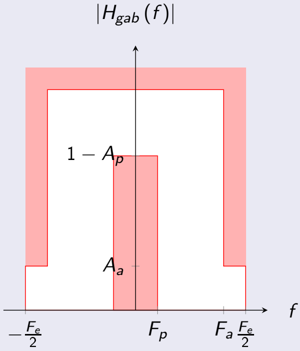
+ Avantage : on a l'assurance que la réponse impulsionnelle h_n telle que $\mathcal{Z}\left\{h_n\right\}(z) = H(z)$ coincide avec la fonction $h(t)$ telle que $\mathcal{L}\left\{h\right\}(p) = H_{gab}(p)$: $h_n = h(nT_e)$ pour tout n. Grâce à ce point le gabarit est automatiquement respecté puisqu'on retrouvera dans la bande $\left[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}\right]$ la même fonction que H_{gab} mais à condition que le recouvrement soit faible ce qui impose souvent de choisir $Fe \gg F_c$!
− Inconvénient : la méthode ne s'adresse qu'aux fonctions de transfert type fraction rationnelle et il faut effectuer la décomposition en éléments simples.

Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

Exemple

Pour un gabarit de départ identique à celui vu au chapitre 2 :

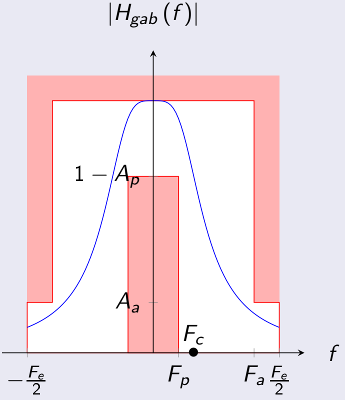
- Pour la 1ère étape, il faut anticiper d'éventuels problèmes de recouvrement. La fréquence maximale de la fonction de transfert est la fréquence de coupure F_c d'où $F_e > 2F_c$ (Shannon). Choisissions par exemple $F_e = 1Hz$ et $F_c = \frac{1}{2\pi}$:



Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

Exemple

- Pour la 2ème étape, supposons qu'un filtre de Butterworth d'ordre 2 satisfait le gabarit : $H_{gab}(p) = \frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$ si $F_c = \frac{1}{2\pi}$.



Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

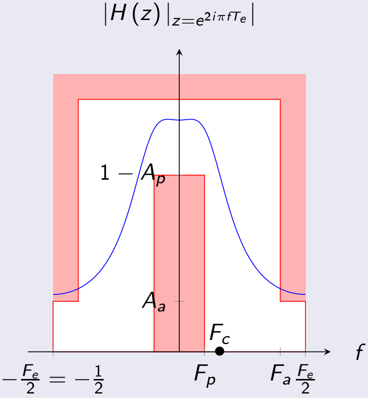
Exemple

- Passons à la $3^{\text{ème}}$ étape qui consiste à faire la décomposition en éléments simples. Dans notre cas, on obtient
$$H_{gab}(p) = \frac{-i\frac{\sqrt{2}}{2}}{p+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{i\frac{\sqrt{2}}{2}}{p+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$
- Pour la $4^{\text{ème}}$ et dernière étape, il ne reste plus qu'à procéder au changement de variable d'où
$$H(z) = \frac{-i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)T_e}z^{-1}} + \frac{i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)T_e}z^{-1}}.$$

Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

Exemple

- Pour vérification, on peut calculer $H(f)$ à partir de $H(z)$ et tracer son module :

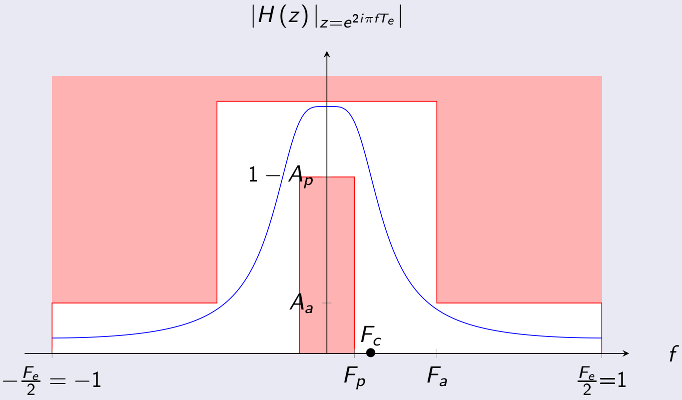


On constate alors que le gabarit n'est pas respecté.

Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

Exemple

- Nous avons pris $F_e = 1$Hz ce qui est largement supérieur à F_c mais le filtre de Butterworth étant peu sélectif le recouvrement sera malgré tout assez important. Passons à $F_e = 2$Hz :



Méthode par transformation bilinéaire :

1. Restreindre le gabarit à l'intervalle des fréquences numériques $f_{num} \in \left[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}\right]$ (même explication que la méthode précédente).
2. Transformer ce gabarit en gabarit analogique à l'aide du changement de variable : $f_{ana} = \frac{1}{\pi T_e} \tan\left(\pi f_{num} T_e\right)$.
3. Trouver une fonction continue $H_{gab}\left(p\right)$ (domaine de Laplace) qui satisfait le gabarit à l'aide d'une approche vue au chapitre 2.
4. Effectuer le changement de variable $p = \frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ (appelé transformation bilinéaire) pour obtenir $H\left(z\right) = H_{gab}\left(p\right)\big|_{p=\frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$.

Méthode par transformation bilinéaire :

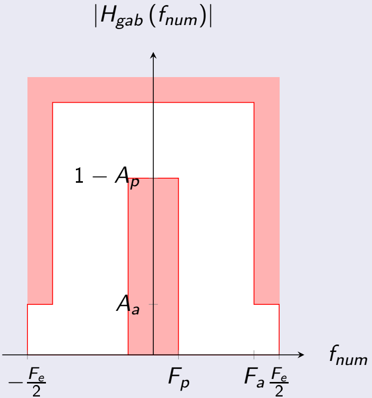
- \+ Avantage : La transformation bilinéaire fait correspondre le domaine de stabilité des fractions rationnelles en analogique (demi-plan gauche) à celui des fractions rationnelles en numérique (cercle unité). On est donc assuré que le filtre est stable.
- − Inconvénient : Comme la méthode précédente, la méthode ne s'adresse qu'aux fonctions de transfert type fraction rationnelle puisque nous souhaitons que $H(z)$ en soit aussi une. La méthode n'assure pas que le gabarit sera respecté, une étape de vérification s'impose donc.

Méthode par transformation bilinéaire :

Exemple

Pour un gabarit de départ identique à celui vu au chapitre 2 :

- Pour la 1ère étape, considérons le même gabarit que dans l'exemple précédent et qui concerne donc le filtre numérique souhaité. L'axe des fréquences est alors ici f_{num} :



Méthode par transformation bilinéaire :

Exemple

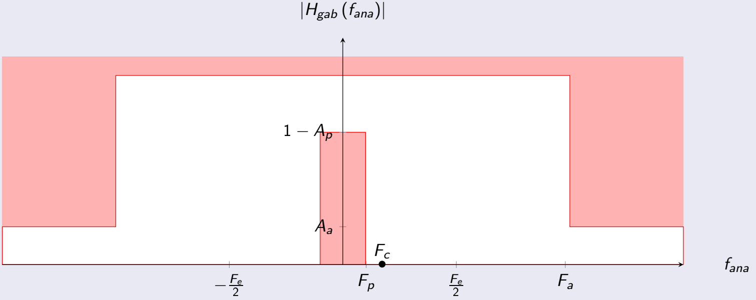
- Pour la 2ème étape, il faut modifier ce gabarit en changeant l'axe des fréquences qui devient f_{ana}. Les seuls paramètres concernés sont donc F_p, F_a et F_c. Les modifications de leurs valeurs sont données dans le tableau suivant :

	f_{num}	f_{ana}
F_p	0.1	0.103
F_a	0.4	0.98
F_c	$\frac{1}{2\pi} \approx 0.16$	0.1734

Méthode par transformation bilinéaire :

Exemple

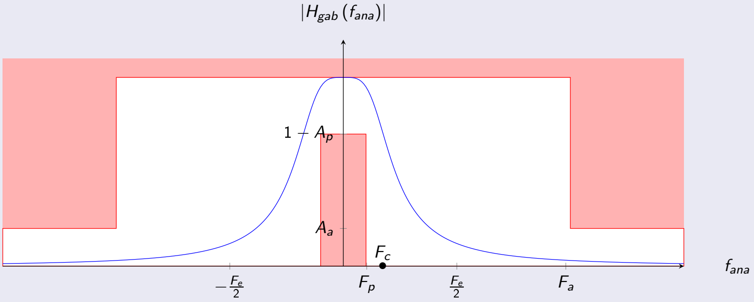
- On aboutit au gabarit analogique suivant :



Méthode par transformation bilinéaire :

Exemple

- Passons à la $3^{\text{ème}}$ étape et supposons qu'un filtre de Butterworth d'ordre 2 satisfait le gabarit analogique. Pour $F_c = 0.1734$, on a $H_{gab}(p) = \frac{157.91}{p^2+17.7715p+157.9137}$. Son tracé (en module) s'intègre bien dans le gabarit analogique :

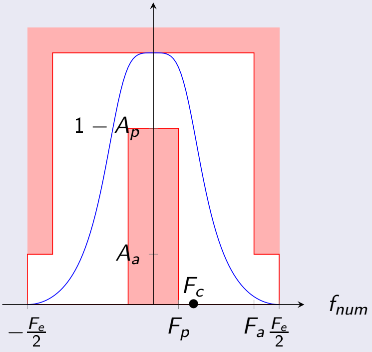


Méthode par transformation bilinéaire :

Exemple

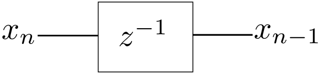
- Pour la 4ème étape, il ne reste plus qu'à procéder au changement de variable pour obtenir $H(z)$ dont l'expression explicite présente peu d'intérêt. En revanche, on peut vérifier que le gabarit numérique est respecté :

$$\left| H(z)\,|_{z=e^{2i\pi f T_e}} \right|$$

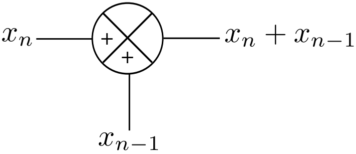


Réalisation de filtres numériques :

- Un filtre numérique s'effectue à l'aide de composants de base d'électronique numérique.
- Trois composants sont nécessaires pour reproduire sous forme de circuits une équation aux différences :
  - l'opérateur retard,

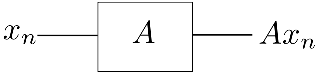


  - le sommateur,



Réalisation de filtres numériques :

- le gain.



- Chacun de ces composants correspond à une fonction de logique combinatoire et séquentielle. Par exemple, l'opérateur retard correspond à une bascule D.

Réalisation de filtres numériques :

- Grâce aux méthodes de synthèse nous savons obtenir $H(z)$ dont l'expression contient les coefficients de l'équation aux différences correspondant au système que nous souhaitons réaliser :

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i s_{n-i} = \sum_{j=0}^{m} \beta_j e_{n-j}.$$

Réalisation de filtres numériques :

- Le circuit d'électronique numérique correspondant à une équation quelconque est :

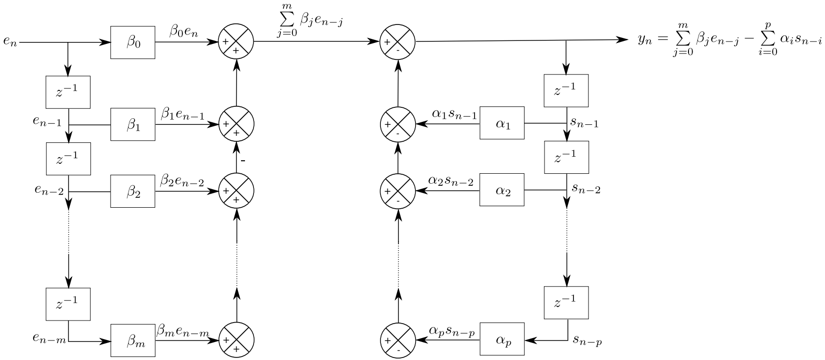


FIGURE – Vue schématique d'un circuit correspondant à une équation aux différences.