Chapitre 1 : Analyse des signaux analogiques

John Klein

Université de Lille - CRIStAL UMR CNRS 9189

Plan du chapitre

Le signal par l'exemple :

- signal : terme couramment employé et compris sans difficulté.
- Quels exemples de signaux pouvez vous citer spontanément ?

Un signal a une existence physique qui est généralement de type ondulatoire :

- onde lumineuse,
- onde acoustique,
- onde électromagnétique.

Définition

Un **signal** est la manifestation physique (essentiellement via un phénomène ondulatoire) d'un transport d'information.

Cette manifestation est représentable sous forme d'une fonction mathématique.

Le mot « **information** » :

- Pourquoi une tension alternative circulant dans un réseau électrique domestique n'est pas un signal ?
- Pourquoi une tension électrique circulant sur le réseau téléphonique est bien un signal ?
- L'**information** n'est **pas de nature physique**.

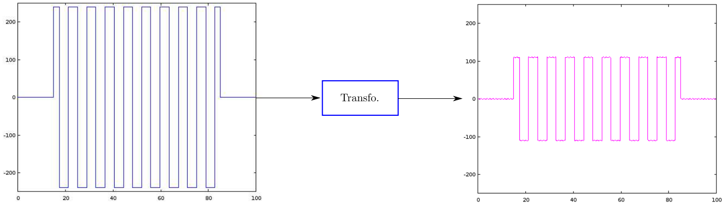
Définition

(dans ce cours) Un **signal** est phénomène ondulatoire physique (et donc mesurable) représenté sous forme d'une fonction mathématique du temps $x(t)$.

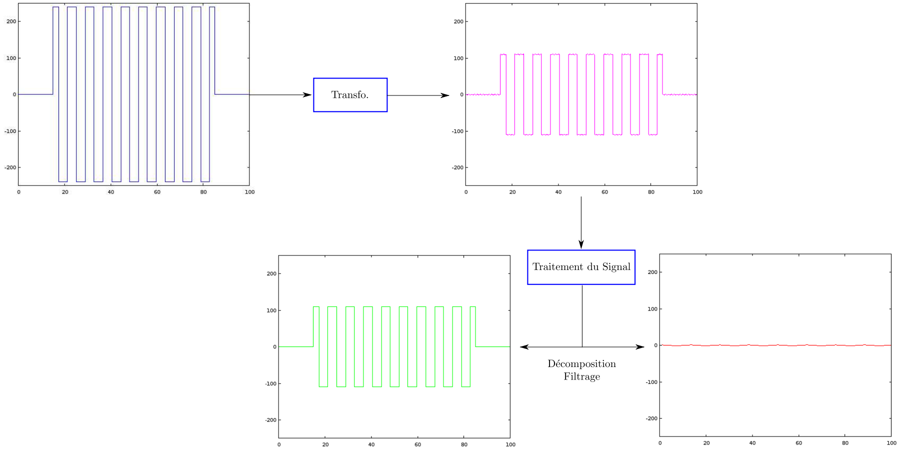
Applications :

- en IA et data sciences : Le TS est un champ des data sciences et joue une rôle essentiel dans des applis de reconnaissance vocale ou d'images.
- en télécommunications : le TS permet de transporter l'information selon différentes modalités et d'améliorer la qualité de la transmission.
- en génie élec. : mise en forme de tensions et courants.
- en auto. : construction d'observateurs.

Pourquoi du traitement du signal dans le master ASE ?
Exemple en génie électrique



Pourquoi du traitement du signal dans le master ASE ?
Exemple en génie électrique



Pourquoi du traitement du signal dans le master ASE ?

Exemple en automatique

Chaîne de commande d'un moteur électrique simple (modélisable par une fonction de transfert du $2^{\text{ème}}$ ordre).

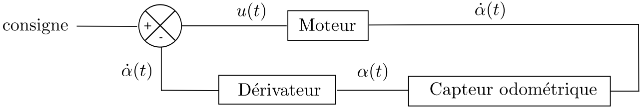


FIGURE – Chaîne de commande d'un moteur électrique. $u(t)$ est la commande et $\alpha(t)$ l'angle de rotation du moteur.

En théorie cette chaîne de commande fonctionne parfaitement. En pratique sans un bloc de traitement du signal entre le dérivateur et le sommateur, cela sera très décevant. Pourquoi ?

Catégories de signaux :

- **signaux temporels / spatiaux / spatio-temporels** : il existe une relation fonctionnelle entre une grandeur physique et la valeur du signal. La plupart du temps, un signal est une fonction du temps, on parle alors de signal temporel (par ex : signal électro-magnétique reçu par une antenne). Parfois le signal est une fonction de l'espace (par ex : une image est un signal spatial à deux dimensions). En outre, on peut trouver des signaux comme les vidéos qui sont des signaux spatio-temporels à trois dimensions (1 temporelle et 2 spatiales).

- **signaux continus / discrets** ou **analogiques / numériques** : les signaux sont dit analogiques ou continus quand ils sont fonction d'une variable continue. Ces signaux sont alors traités par des circuits électroniques classiques à bases de condensateurs, bobines et résistances. Par opposition, les signaux numériques ou discrets sont des suites temporelles indexées par un nombre entier. Les appareils modernes sont numériques car les processeurs ne traitent que des données numérisées (processeur = capacité de calcul énorme).

Catégories de signaux :

- **signaux déterministes / aléatoires** : un signal est aléatoire si la valeur qu'il prend à un instant donné est incertaine et caractérisée par une distribution de probabilités. Les électro-cardiogrammes sont un exemple classique de signaux aléatoires car les fréquences et les amplitudes des pulsations cardiaques sont imprévisibles. Quand l'alea est négligeable, on parle de signal déterministe et nous nous focaliserons uniquement sur des tels signaux dans ce cours.

- **signaux périodiques / apériodiques** : assez évident, un signal est périodique si la fonction mathématique qui sert à le modéliser l'est aussi.

Plan du chapitre

Analyse temporelle

- Nous étudierons uniquement des signaux fonction de la variable temporelle dans ce cours. Un signal est donc modéliser par une fonction du temps notée par exemple $x(t)$.
- On entend par le terme « analyse » le fait d'étudier un signal dans le but d'en extraire une caractéristique, un marqueur ou une propriété qui nous renseigne sur le comportement global du signal au cours du temps, tels que :
  - Le signal est il borné ?
  - Le signal finit-il par converger vers zéro quand $t \longrightarrow \infty$?

Caractéristiques liée à la physique :

- Comme un signal est souvent de nature ondulatoire, cette même onde peut être caractérisée par son énergie et sa puissance.
- Un signal « réel » est forcément d'énergie finie et de puissance finie.
- le calcul d'une énergie par exemple dépend de la nature de l'onde (acoustique, électrique, lumineuse ou même sismique). Pour éviter de calculer une caractéristique dépendant de ces aspects, on calcule en traitement du signal des énergies et des puissances **sans unité**.

Définition

On appelle **puissance instantanée** du signal $x(t)$ la fonction $p_x(t) = |x^2(t)|$.

Notons que dans un cadre général, $x(t)$ peut être un signal complexe : $x(t) \in \mathbb{C}$. La notation $|.|$ désigne alors le module et non simplement la valeur absoule. Dans le cas où $x(t)$ est une tension électrique continue aux bornes d'une résistance, on note l'analogie de cette définition avec le fait que la (vraie) puissance électrique est alors proportionnelle à la tension au carré.

Définition

On appelle **puissance moyenne totale** du signal $x(t)$ la quantité

$$P_x = \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x^2(t)| dt.$$

Quand $x(t)$ est un signal périodique de période T, cette formule se simplifie : $P_x = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} |x^2(t)| dt \rightarrow$ démonstration en TD.

Définition

On appelle **énergie** du signal $x(t)$ la quantité $E_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x^2(t)| dt$.

Pour s'épargner quelques calculs fastidieux, on peut retenir que :

- puissance $\infty \Rightarrow$ énergie ∞,
- énergie finie $\Rightarrow$ puissance moyenne totale nulle.

Comparaison de signaux : l'inter-corrélation.

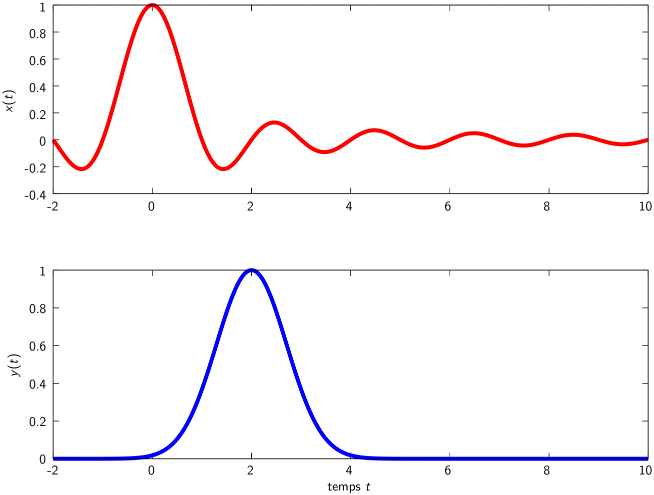
Définition

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie. On note $C_{xy}(\theta)$ la **fonction d'inter-corrélation** de x avec y définie par :

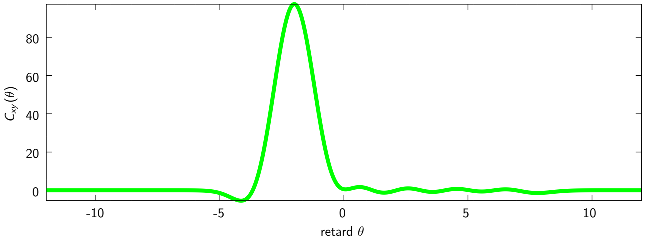
$$C_{xy}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\overline{y}(t-\theta)\,dt, \qquad (1)$$

avec $\overline{y}(t)$ le conjugué complexe de $y(t)$. On rappelle que si $y(t)$ est réel alors on a simplement $\overline{y}(t) = y(t)$.

Exemple d'inter-corrélation



Exemple d'inter-corrélation (suite)



Commentaires sur la figure :

- De manière générale, on a $C_{xy}(\theta) \neq C_{yx}(\theta)$.
- On peut comparer un signal à lui même. La fonction obtenue C_{xx} est alors appelée **fonction d'auto-corrrélation** :

$$C_{xx}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\overline{x}(t-\theta)\,dt. \tag{2}$$

La fonction d'auto-corrélation possède les petites propriétés suivantes :

- C_{xx} atteint son maximum en $\theta = 0$: $\forall \theta \in \mathbb{R},\ C_{xx}(\theta) \leq C_{xx}(0)$.
- Si $x(t)$ est un signal réel, alors C_{xx} est symétrique : $C_{xx}(-\theta) = C_{xx}(\theta)$.
- Si $x(t)$ est périodique, on étend la définition : $C_{xx}(\theta) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\,\overline{x}(t-\theta)\,dt$.

Plan du chapitre

Pourquoi analyser les fréquences d'un signal ?

- La fréquence est la grandeur duale du temps. Séparer temporellement un signal en plusieurs morceaux n'est pas pertinent. Une séparation fréquentielle (voir prochain chapitre) est bien plus utile !

- Les signaux sont souvent des ondes. Toutes les ondes vibrent à une ou plusieurs fréquences simultanément. Un système ne répond pas toujours de la même manière quand on lui soumet une entrée oscillante.

- La théorie de l'information montre qu'un signal composé de motifs répétitifs est pauvre en informations. En prenant le cas limite, un signal purement périodique est quasiment vide d'information.
  $\rightarrow$ richesse informationelle implique richesse fréquentielle.

Plan du chapitre

Analyse fréquentielle des signaux analogiques périodiques

L'analyse fréquentielle s'appuie sur les travaux de Joseph Fourier. Ses résultats concernaient des fonctions périodiques. On peut donc les appliquer pour l'analyse de signaux périodiques.

Théorème (de décomposition de Dirichlet)

Soit $x(t)$ un signal périodique[a] de période T. Il existe alors deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n>0}$ telles que :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nFt) + b_n \sin(2\pi nFt), \tag{3}$$

avec $F = \frac{1}{T}$ la fréquence fondamentale du signal. Les termes a_n et b_n sont appelés ***coefficients de Fourier*** *du signal x.*

---

a. On rappelle qu'un tel signal a la propriété suivante : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t+T) = x(t)$.

Théorème de décomposition :

- Ce théorème se prouve en montrant que les cosinus et sinus de cette formule forment une base de l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques. En réalité, ce théorème n'est rien d'autre qu'un changement de base.

- Ce théorème montre que la connaissance des suites dénombrables $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n>0}$ suffit à reconstruire la valeur du signal x en tout instant t. Encore plus fort, on peut montrer que sous hypothèse d'intégrabilité de x sur sa période, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n = 0.$$

- Pourquoi est ce intéressant ?

Savoir que les coefficients de Fourier sont des caractéristiques pertinentes, c'est bien ... savoir calculer ces coefficients, c'est mieux : pour $n \geq 1$,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \qquad \text{(moyenne du signal)}, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi nFt)\,dt \qquad \text{pour } n \geq 1, \tag{5}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi nFt)\,dt \qquad \text{pour } n \geq 0. \tag{6}$$

Le coefficient a_0 est la moyenne du signal mais est aussi appelé composante continue.

Coefficients complexes :

- Pour des raisons de simplicité d'écriture, on préfère souvent utiliser un nombre complexe pour faire référence au couple (a_n, b_n). On définit alors les **coefficients complexes de Fourier** $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ comme suit :

$$c_n = \begin{cases} a_0 \text{ si } n = 0, \\ \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-2i\pi nFt} dt \text{ si } n \geq 1, \\ \overline{c}_{-n} \text{ si } n < 0. \end{cases} \tag{7}$$

- On calcule soit (a_n, b_n) soit c_n mais jamais les deux car on passe de l'un à l'autre :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \\ a_n &= 2\mathrm{Re}\{c_n\}, \\ b_n &= -2\mathrm{Im}\{c_n\}. \end{aligned}$$

Coefficients complexes :

- Le théorème de décomposition se ré-exprime dans le cas complexe comme suit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi nFt}. \tag{8}$$

Coefficients complexes :

- Un nombre complexe est souvent préférablement représenté par son module et sa phase (ou argument) :

$$
\begin{aligned}
|c_n| &= \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\
\varphi(c_n) &= \begin{cases}
\arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \mod 2\pi & \text{si } a_n > 0 \\
\arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) + \pi \mod 2\pi & \text{si } a_n < 0 \text{ et } b_n \leq 0 \\
\arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) - \pi \mod 2\pi & \text{si } a_n < 0 \text{ et } b_n \geq 0 \\
+\frac{\pi}{2} \mod 2\pi & \text{si } a_n = 0 \text{ et } b_n > 0 \\
-\frac{\pi}{2} \mod 2\pi & \text{si } a_n = 0 \text{ et } b_n < 0 \\
? & \text{si } a_n = 0 \text{ et } b_n = 0
\end{cases} \\
c_n &= |c_n| e^{i\varphi(c_n)}.
\end{aligned}
$$

Vers une représentation fréquentielle d'un signal périodique :

- D'après le théorème de décomposition, connaître les coefficients permet de reconstruire n'importe quelle valeur du signal $x(t)$.
- L'ensemble des coefficients forment donc une nouvelle représentation du contenu du signal.
- Puisque chaque coefficient est associé à une fréquence de type $n \times F$, on peut définir la fonction suivante appelée représentation fréquentielle :

Définition

Soit $x(t)$ un signal T-périodique de fréquence fondamentale $F = \frac{1}{T}$ et de coefficients de Fourier complexes c_n. On appelle **représentation fréquentielle** de x, la fonction des fréquences f notée par $X(f)$ telle que $\forall f \in \mathbb{R}$, on a :

$$X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - nF). \qquad (9)$$

Rappel : impulsion de Dirac

- Notée δ cet objet est défini comme suit :

$$\delta(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } f = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} . \tag{10}$$

- $\delta(f - nF)$ est donc une impulsion de Dirac centrée en nF.

- Toute représentation fréquentielle d'un signal analogique périodique est donc un train d'impulsions d'amplitudes variables.

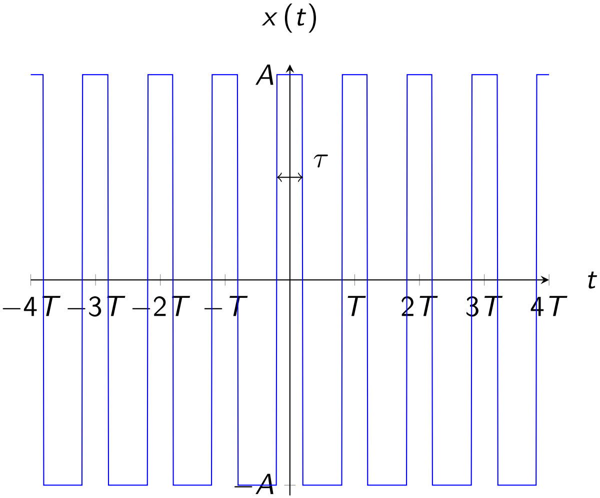
- δ est en réalité un objet plus général qu'une fonction car elle possède la propriété suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} g(u)\,\delta(u - u_0)\,du = g(u_0). \tag{11}$$

Exemple : Soit $x(t)$ un signal dit train de pseudo-impulsions à composante continue non-nulle. La période de ce signal est notée T et sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ s'exprime comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} A \text{ si } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ -A \text{ si } t \in \left[-\frac{T}{2}; -\frac{\tau}{2}\left[\cup \right]\frac{\tau}{2}; \frac{T}{2}\right] \end{cases} . \quad (12)$$

il est toujours préférable de dessiner le signal en fonction du temps pour s'éviter une erreur d'étourderie.



L'obtention de la réprésentation fréquentielle à partir de la temporelle passe toujours en seulement deux étapes :

1. calcul des coefficients de Fourier (soit les réels, soit les complexes),
2. écriture de la représentation fréquentielle à l'aide de l'équation (9).

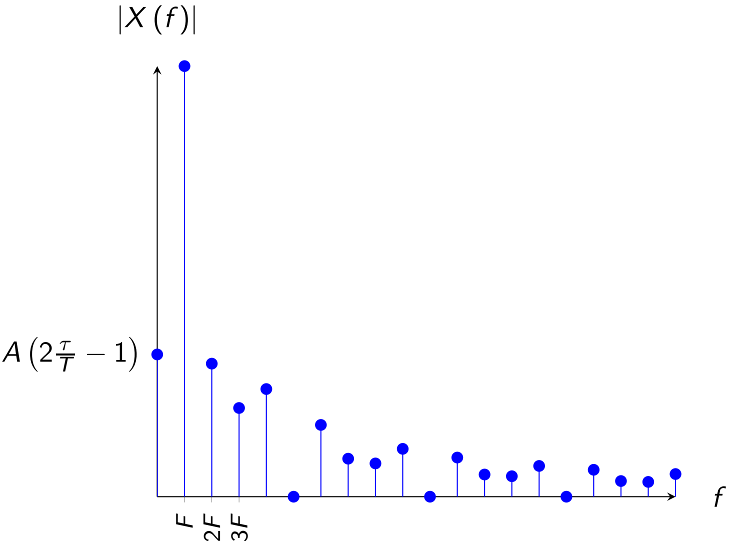
Ce signal est dit « à composante continue non-nulle » car sa moyenne est non nulle. Passons au calcul de cette moyenne :

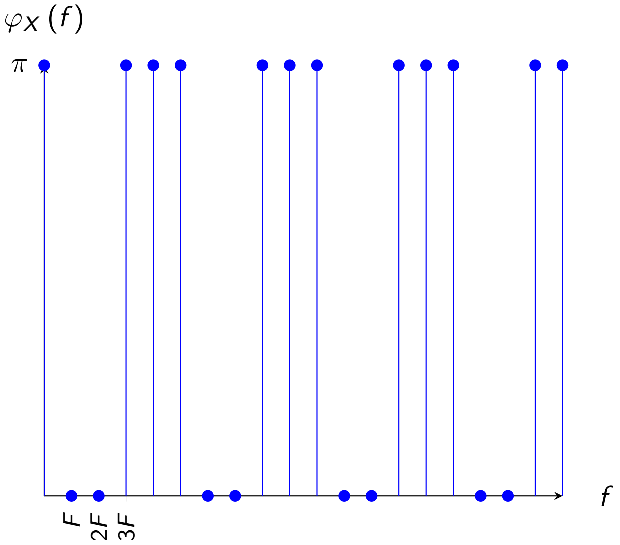
$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt,$$

Passons maintenant au calcul des autres coefficients :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-2i\pi nFt} dt, \tag{13}$$

Maintenant que les coeffcients sont connus, on obtient la représentation fréquentielle : $X(f) = A\left(2\frac{\tau}{T} - 1\right)\delta(f) + 2A\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{\sin(\pi n F\tau)}{\pi n}\delta(f - nF)$.




$\varphi_X(f)$
π
f
F
$2F$
$3F$

Interprétation des courbes :

- Pour le module : le plus gros pic est observé en $f = F$, ce qui est bien normal puisque c'est la fréquence sur laquelle le signal périodique est défini.
- La moyenne, c'est à dire le pic centré en 0 peut parfois excéder le pic du fondamental.
- On voit bien que la hauteur des pics tend vers 0.
- Pour la phase : les alternances observées entre 0 et π correspondent en fait au signe de $X(f)$.

Plan du chapitre

- Un signal périodique est à énergie infinie et est très répétitif $\longrightarrow$ pas réaliste et un peu informatif.

- L'astuce suivante permet de généraliser les résultats obtenus dans le cas des signaux périodiques à ceux qui sont apériodiques : notons $x(t)$ un signal apériodique et $x_T(t)$ un signal périodique construit à partir de x tel que x_T et x coincident sur la période centrale :

$$x_T(t) = x(t) \text{ si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right].$$

- Quand la période T tend vers l'infini, x_T tend vers x. En somme, un signal apériodique peut être vu comme un signal de période infinie !

Ce passage à la limite permet d'obtenir la représentation fréquentielle d'un signal apériodique (à énergie finie) :

Définition

Soit $x(t)$ apériodique à énergie finie. On appelle **transformée de Fourier** (TF) de x, la représentation fréquentielle notée $X(f)$ telle que :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2i\pi ft} dt. \tag{14}$$

On note $\mathcal{F}$, l'opérateur de Fourier qui à x associe X : $X = \mathcal{F}\{x\}$.

Transformée de Fourier :

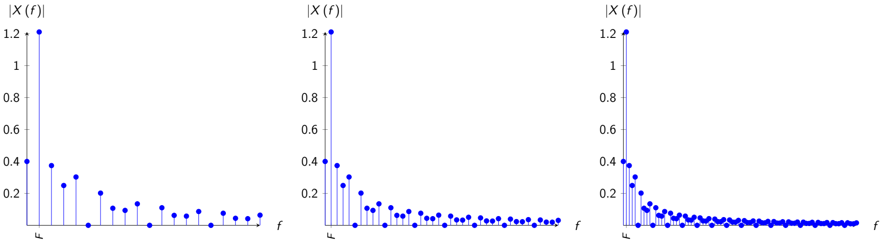
- $X(f)$ est en quelque sorte le même signal que $x(t)$ mais observé sous un angle différent.
- La transformée de Fourier est une opération sans perte et la représentation fréquentielle contient donc autant d'information que la temporelle. Elle est donc par conséquent également réversible ; on parle de **tranformée inverse de Fourier** :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X\}(t), \tag{15}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+2i\pi ft} df. \tag{16}$$

Attention au signe de l'exponentielle et à la variable d'intégration !

Que se passe-t-il pour la Représentation spectrale d'un signal périodique quand $T \longrightarrow \infty$?



Faire tendre T vers ∞ équivaut à faire tendre F vers 0, ce qui revient à accoler les pics de Diracs.

Voici une liste de propriétés de la TF qui sont surtout utiles pour faciliter un calcul théorique :

- **Linéarité** : Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie et $(a, b) \in \mathbb{C}$ deux constantes. On a :

$$\mathcal{F}(a \times x + b \times y) = a \times \mathcal{F}(x) + b \times \mathcal{F}(y). \tag{17}$$

  cette propriété est très pratique pour découper un calcul de TF en plusieurs morceaux.

- **Changement d'échelle** : soit $a \in \mathbb{C}$ une constante et $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie tels que $y(t) = x(at)$. On a :

$$Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right). \tag{18}$$

  Une dilatation de l'axe des temps entraîne une contraction de l'axe des fréquences.

- **Translation temporelle** : soit $x(t)$ un signal à énergie finie et $t_0 \in \mathbb{R}$ une constante temporelle. On note $y(t)$ le signal $x(t)$ retardé de t_0, *i.e.* $y(t) = x(t - t_0)$. On a :

$$Y(f) = e^{-2i\pi f t_0} X(f). \tag{19}$$

Un retard temporel rajoute un déphasage linéaire : $\varphi_Y(f) = \varphi_X(f) - 2\pi f t_0$.

- **Translation fréquentielle** : soit $x(t)$ un signal à énergie finie et $f_0 \in \mathbb{R}$ une fréquence constante. On note $y(t)$ le signal tel que $Y(f) = X(f - f_0)$. On a :

$$y(t) = e^{2i\pi f_0 t} x(t). \tag{20}$$

Un décalage fréquentiel entraîne la multiplication du signal côté temporel avec une fonction complexe oscillant à une fréquence pure. Multiplier un signal en temporel par un sinus ou un cosinus oscillant à une fréquence donnée a pour effet de décaler la représentation spectrale sur l'axe des fréquences $\longrightarrow$ modulation des signaux.

- **Parité** : si un signal à énergie finie possède une certaine parité alors sa TF possède la même. Cette propriété s'avère utile pour repérer une erreur de calcul éventuelle.
- **Conjuguaison** : soit $x(t)$ un signal à énergie finie complexe. On a :

$$\overline{X}(f) = \overline{X(-f)}. \tag{21}$$

La TF du signal conjugué est le conjugué de la TF dont l'axe des fréquences a été renversé.

- **Dérivation temporelle** : soit $x(t)$ un signal continu à énergie finie tel que sa dérivée $x'(t)$ soit aussi à énergie finie. On a :

$$\mathcal{F}\left\{x'\right\}(f) = 2i\pi f \times X(f). \tag{22}$$

Si vous connaissez la TF d'un signal, vous savez très facilement trouver la TF de sa dérivée. Le principe peut être itéré à plusieurs dérivations successives :

$$\mathcal{F}\left\{x^{(n)}\right\}(f) = (2i\pi f)^n \times X(f). \tag{23}$$

- **Dérivation fréquentielle** : soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie tels que $y(t) = t^n x(t)$. On a :

$$Y(f) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n X^{(n)}(f). \tag{24}$$

- **Convolution** :
  Rappel : Soient deux signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$. On note $\{x \star y\}(t)$ le signal temporel obtenu par produit de convolution de x avec y. On a la relation :

$$\{x \star y\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)\, y(u)\, du. \tag{25}$$

  L'impulsion de Dirac est l'élément neutre de cette opération : pour tout signal à énergie finie x, on a :

$$\{x \star \delta\} = x. \tag{26}$$

  Attention le produit de convolution de deux signaux en temporel donne un troisième signal également temporel ! Il ne permet pas de passer au domaine fréquentiel. En revanche, il possède une propriété très forte par rapport à la TF :

$$\mathcal{F}\{x \star y\} = \mathcal{F}\{x\} \times \mathcal{F}\{y\}, \tag{27}$$

$$\mathcal{F}\{x \times y\} = \mathcal{F}\{x\} \star \mathcal{F}\{y\}. \tag{28}$$

- **Conservation de l'énergie** (formule de Parseval) : soit $x(t)$ un signal à énergie finie. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \tag{29}$$

Un signal possède bien sûr la même énergie qu'il soit étudié d'un point de vue temporel ou fréquentiel.

Théorème (de Wiener-Kinchine)

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie. On note C_{xx} sa fonction d'auto-corrélation, on a alors :

$$\mathcal{F}\{C_{xx}\}(f) = |X(f)|^2. \tag{30}$$

La TF de la fonction d'auto-corrélation est le module au carré de la TF du signal.

Ce résultat est exploité dans le TP n°4.

Spectres de signaux : La représentation fréquentielle d'un signal (périodique ou non) est souvent également appelée **spectre**.

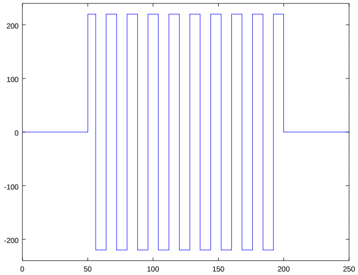
Représentation temporelle $x(t)$	Représentation fréquentielle $X(f)$
Cosinus oscillant à la fréquence fondamentale F $\cos(2\pi Ft)$	Diracs symétriques $\frac{1}{2}(\delta(f+F)+\delta(f-F))$
Sinus oscillant à la fréquence fondamentale F $\sin(2\pi Ft)$	Diracs anti-symétriques $\frac{i}{2}(-\delta(f+F)+\delta(f-F))$
Impulsion d'amplitude A $A\delta(t)$	Spectre plat de hauteur A A
Constante A A	Impulsion de hauteur A $A\delta(f)$
Peigne de hauteur unité de période T $Ш_T(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)$	Peigne de hauteur $\frac{1}{T}$ et de période $\frac{1}{T}$ $\frac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$

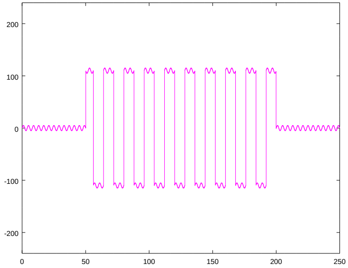
Représentation temporelle $x(t)$	Représentation fréquentielle $X(f)$
Porte centrée de largeur τ $\Pi_{\left[-\frac{\tau}{2};\frac{\tau}{2}\right]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \left[-\frac{\tau}{2};\frac{\tau}{2}\right] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	Sinus cardinal $\tau \mathrm{sinc}(\pi f \tau) = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$
Sinus cardinal $\mathrm{sinc}(t)$	Porte centrée de largeur $\frac{1}{\pi}$ $\pi \Pi_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}(f)$
Gaussienne e^{-at^2} avec $a > 0$	Gaussienne $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{a}}$

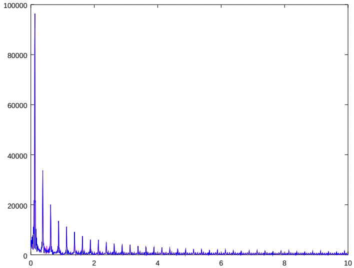
Exemple : La fonction porte a une importance capitale en traitement du signal car elle symbolise « l'effet mesure ». Démontrons le résultat fourni concernant une fonction porte pour laquelle on choisit une largeur $\tau = 1$:

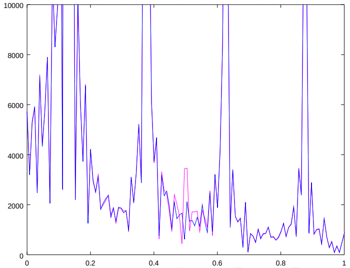
$$\mathcal{F}\left\{\Pi_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]}\right\}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]}(t)\, e^{-2i\pi f t} dt,$$

Représentation fréquentielle : utilité concrète

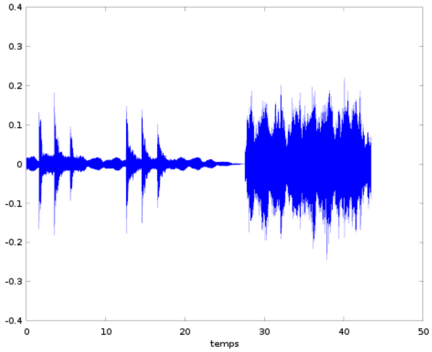


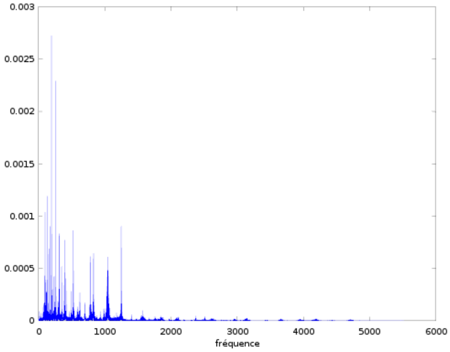






Vers une fréquence instantanée ?
Extrait d'un signal musical et le module de son spectre :





Vers une fréquence instantanée ?

- Les pics du spectre correspondent en réalité à certaines notes (plus ou moins graves) du morceau.
- Le spectre donne l'impression que toutes les notes sont jouées en même temps du début à la fin !
- Existe-t-il alors un moyen de localiser les pics à forte énergie à la fois en temps et en fréquence ? La réponse est oui mais avec une précision limitée. En effet, le principe d'incertitude stipule que la résolution temporelle Δt et fréquentielle Δf sont contraintes par la relation :

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}. \tag{31}$$

- La solution basique consiste à faire successivement les TFs de petits morceaux de $x(t)$ (TF à court terme).

Vers une fréquence instantanée ?
Spectrogramme :