A2DI: Proba/Stat

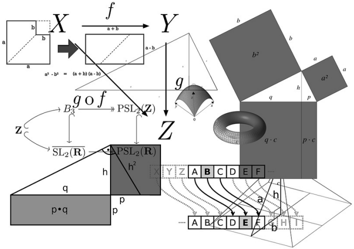
John Klein

Lille1 Université - CRIStAL UMR CNRS 9189

Pourquoi des probas en ML ?

Raison n°1 :

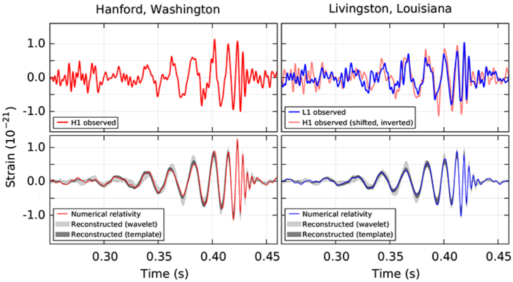
- Si on fait du ML, c'est parce que la solution exacte du problème est inconnue.
- Elle est inconnue parce que souvent l'univers est trop complexe pour trouver un modèle analytique.
- Les probabilités sont justement un moyen très pertinent pour obtenir une solution approximative mais simple.



(images pixabay.com)

Pourquoi des probas en ML ?
Raison n°2 :

- En ML, on extrait un modèle des données.
- La plupart du temps, les données sont polluées par des incertitudes (erreur de mesure, bruit, arrondi, etc.).
- Les probabilités forment le modèle d'incertain le plus couramment utilisé.



Plan du chapitre

1 Probabilités

2 Statistiques

- **Probabilités** : modèle mathématique pour représenter l'incertain.

- **Statistiques** : proba + data
  - On cherche un modèle probabiliste cohérent avec les données (fit),
  - On extrait de ce modèle des attributs ou des estimés (classe, prédiction, ..)

Intuitivement, une proba c'est quoi ?

- Une fréquence d'occurrence dans une expérience aléatoire.
- Cas d'école : le lancé de dé.
- $\mathbb{P}(2) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sharp\{\text{lancé} = 2\}}{n}$ où n est le nombre de lancés.

- L'ensemble des possibles, ou univers, est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Pour atteindre la proba, il faut une infinité de réalisations de l'expérience aléatoire.

Intuitivement, une proba c'est quoi ?

- Une fréquence d'occurrence dans une expérience aléatoire.
- Parfois, certaines probas peuvent s'obtenir par simple dénombrement.
- Cas d'école : le poker.
- $\mathbb{P}\left(\{\text{paire d'as}\}\right) =$

Intuitivement, une proba c'est quoi ?

- La représentation d'une connaissance partielle.
- Ex : Est ce que ce patient est malade de la grippe ?
- info n°1 : Il a mal à la tête.
- info n°2 : Il a des douleurs musculaires.
- Ces deux informations sont certaines mais ne nous permettent pas de déterminer intégralement la maladie du patient.
- Il n'y a aucun aléa, on ne peut pas utiliser plusieurs instances du même patient et calculer une fréquence ! La vraie réponse est oui ou non.

- On parle alors de probabilités subjectives par opposition aux autres appelées objectives ou fréquentistes.

Mathématiquement, une proba c'est quoi ?

- Une mesure normalisée à 1.

Définition

Soit Ω un ensemble et 2^{Ω} l'ensemble des sous-parties de Ω.
Soit μ une application de 2^{Ω} dans $[0; +\infty[$. On dit que μ est une mesure ssi :

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- pour tout A et B sous-ensembles de Ω tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

pour aller plus loin : une mesure est en fait définie sur une tribu (ou σ-algèbre) associée à Ω.

Mathématiquement, une proba c'est quoi ?

- Une mesure normalisée à 1.

Définition

Soit μ une mesure sur 2^{Ω}. On dit que μ est une mesure de probabilité ssi :

- $\mu(\Omega) = 1$.

Notion de Variable aléatoire

- Imaginons un jeu :
  - La partie coûte 20€.
  - On lance un dé à 6 faces équiprobables.
  - Le gain est égal au carré de la face obtenue.
- Comment exprimer simplement le retour sur investissement en fonction de l'issue du jeu ?

Variable aléatoire discrète

- On dit d'une variable aléatoire X qu'elle est discrète si l'ensemble des valeurs qu'elle prendre est typiquement $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ ou un ensemble fini comme $\{1; ..; \ell\}$.
- Exemple :
  - Pile ou Face, $X \in \{F; P\}$,
  - Lancé de dé, $X \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,
  - Classe d'un exemple $X \in \{c_1, .., c_\ell\}$,
  - Nombre de personne dans la file du R.U. $X \in \mathbb{N}$.

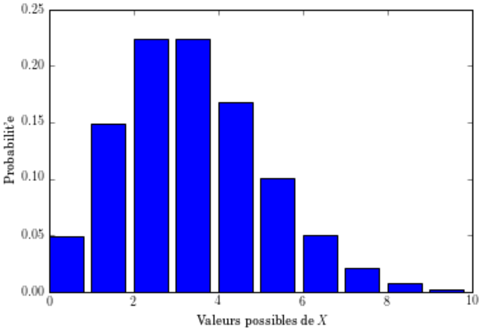
Variable aléatoire continue

- On dit d'une variable aléatoire X qu'elle est continue si l'ensemble des valeurs qu'elle prendre est typiquement $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$).
- Exemple :
  - Sortie d'un capteur de température, $X \in [-273.15; +\infty]$,
  - Cours d'une action, $X \in [0; \infty]$,
  - Proportion de mâles dans une population $X \in [0, .., 1]$,
  - Solution d'un problème de régression $X \in \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète : distribution Soit $\mathbb{X}$ l'ensemble des valeurs possibles de X.

Définition

Les probabilités associées à chaque valeur possible d'une variable aléatoire discrète sont regroupées dans une fonction appelée Loi ou Distribution de X et qu'on notera $p_X : \mathbb{X} \to [0; 1]$ et $p_X(i) = \mathbb{P}(\{X = i\})$



Variable aléatoire continue : densité Soit $\mathbb{X}$ l'ensemble des valeurs possibles de X.

- $\forall a \in \mathbb{X}$, on a $\mathbb{P}(X = a) = 0$!
- Cela signifie que pour ces v.a. une probabilité nulle n'implique pas qu'un événement est impossible !
- On obtient (éventuellement) des probas non nulles que pour des événements du type $X \in [a; b]$ avec $a < b$.
- On doit utiliser une autre fonction pour résumer nos croyances sur les chances d'observer une valeur a plutôt que b.

Définition

On appelle fonction de répartition d'une v.a. la fonction $F_X \colon \mathbb{X} \to [0; 1]$ telle que :

$$F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a). \tag{1}$$

Densité de probabilité

- La définition de la fonction de répartition ou distribution cumulée s'applique aussi aux v.a. discrètes.
- Pour les v.a. continues, sous réserve de pouvoir dériver F_X, on introduit une autre fonction qui caractérise la concentration des chances pour une valeur particulière :

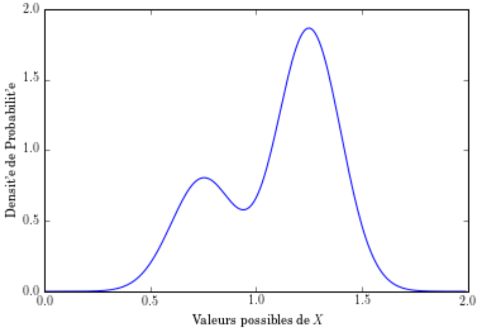
Définition

On appelle densité de probabilité d'une v.a. continue la fonction $p_X\colon \mathbb{X} \rightarrow [0; +\infty]$ telle que :

$$p_X(a) = F_X'(a). \tag{2}$$

Densité de probabilité

- On a $\int p_X(u)\,du = 1$.
- En revanche, il est possible d'avoir $p_X(u) > 1$!



Notation (abusive) : $p_X(A) = \int_A p_X(u)\,du = \mathbb{P}(X \in A)$

Espérance

- Reprenons l'exemple du jeu :
  - La partie coûte 20€.
  - On lance un dé à 6 faces équiprobables.
  - Le gain est égal au carré de la face obtenue.
- Quel retour sur investissement puis-je espérer après un grand nombre de parties ?

partie n°1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
issue	1	6	5	2	2	2	4	4	4	2	4	4
gain	-19	16	5	-16	-16	-16	-4	-4	-4	-16	-4	-4

Espérance

Définition

On appelle espérance d'une fonction f de la v.a. X, la quantité notée $\mathbb{E}_X[f]$ telle que :

$$\mathbb{E}_X[f] = \begin{cases} \sum_{a \in \mathbb{X}} f(a)\, p_X(a) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{\mathbb{X}} f(u)\, p_X(u)\, du & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}. \quad (3)$$

Cas particulier : si $f = \mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice sur $A \subset \mathbb{X}$.

$$\mathbb{I}_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et donc } \mathbb{E}_X[\mathbb{I}_A] = p_X(A). \quad (4)$$

$\rightarrow$ L'espérance est une notion plus générale que la distribution.

Espérance

Souvent, on note $\mathbb{E}_X[id] = \mathbb{E}[X]$.

On les propriétés suivantes :

- $\mathbb{E}[cte] = cte$,
- $\mathbb{E}[aX + Y] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$,
- $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \neq \mathbb{E}[XY]$.

Couple de v.a. : (X, Y)

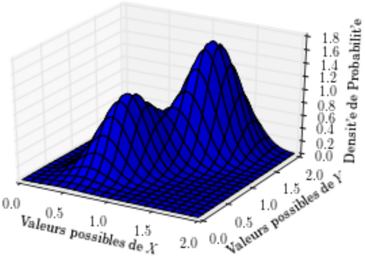
En ML, on doit souvent manipuler des ensembles de v.a. :

- Les exemples d'apprentissage sont souvent multi-dimensionnels et chaque dimension se modélise par une v.a. X_i.
- Si X représente les exemples alors $X = [X_1 \ldots X_d]$ sera un vecteur aléatoire.
- La prédiction est elle aussi incertaine et modélisée par une v.a. Y

Couple de v.a. : (X, Y)

On généralise la notion de distribution pour un couple et on parle de loi jointe notée $p_{X,Y}$:

- $p_{X,Y}(a, b) = \mathbb{P}(X{=}a \textbf{ et } Y{=}b)$ si X et Y sont discrètes et $a \in \mathbb{X}$, $b \in \mathbb{Y}$.
- $p_{X,Y}(A, B) = \mathbb{P}(X \in A \textbf{ et } Y \in B)$ si X et Y sont continues et $A \subset \mathbb{X}$, $B \subset \mathbb{Y}$.
- $p_{X,Y}(A, b) = \mathbb{P}(X \in A \textbf{ et } Y{=}b)$ si X est continue tandis que Y est discrète et $A \subset \mathbb{X}$, $b \in \mathbb{Y}$.



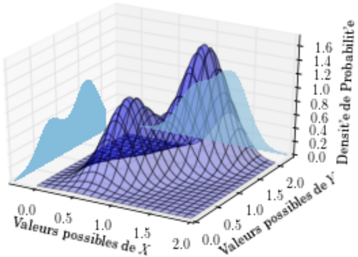
Couple de v.a. (X, Y) : marginales

Définition

On appelle loi marginale la loi p_X d'une v.a. X deduite d'une loi jointe $p_{X,Y}$. On a :

$$p_X(a) = \begin{cases} \sum_{b \in \mathbb{Y}} p_{X,Y}(a,b) & \text{si } Y \text{ est discrète} \\ \int_{\mathbb{Y}} p_{X,Y}(a,y)\, dy & \text{si } Y \text{ est continue} \end{cases}. \quad (5)$$

En général, il n'est pas possible de remonter à la jointe à partir des marginales.

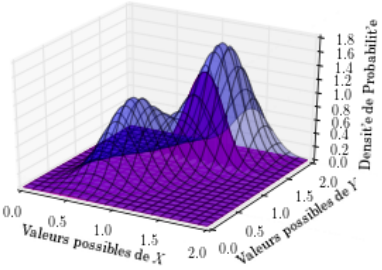


Couple de v.a. (X, Y) : loi conditionnelle

Définition

On appelle loi conditionnelle la loi $p_{X|Y=b}$ d'une v.a. X après avoir observé l'événement $Y = b$ de probabilité (ou de densité) non nulle. On a :

$$p_{X|Y=b}(a) = \frac{p_{X,Y}(a,b)}{p_Y(b)}. \quad (6)$$



Couple de v.a. (X, Y) : Théorème de Bayes

En ML, on souhaite pouvoir renverser un conditionnement. Le théorème de Bayes est un élément-clé d'un tel processus :

$$\begin{aligned} p_{Y|X=a}(b) &= \frac{p_{X|Y=b}(a)\, p_Y(b)}{p_X(a)}, && (7) \\ &= \frac{p_{X|Y=b}(a)\, p_Y(b)}{\int_{\mathbb{Y}} p_{X|Y=u}(a)\, p_Y(u)\, du}, && (8) \\ &\propto p_{X|Y=b}(a)\, p_Y(b). && (9) \end{aligned}$$

Couple de v.a. (X, Y) : Indépendance

Définition

On dit que deux v.a.s X et Y qu'elles sont indépendantes, noté $X \perp\!\!\!\perp Y$ si la jointe est le produit des marginales :

$$p_{X,Y}(A, B) = p_X(A) \times p_Y(B). \tag{10}$$

Exemple

X est le résultat d'un lancé de dé.
Y est le sexe du lanceur.
Le sexe du lanceur n'a aucune influence sur le résultat du lancé, d'où $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Couple de v.a. (X, Y) : Indépendance

On peut également caractériser l'indépendance de deux v.a.s X et Y par le conditionnement :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Leftrightarrow \quad p_{X|Y=b}(a) = p_X(a), \forall a \in \mathbb{X}, b \in \mathbb{Y}. \tag{11}$$

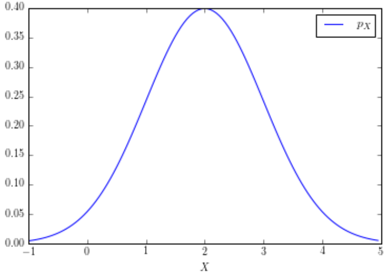
Connaître Y ne nous apporte aucune information sur X !

Couple de v.a. (X_1, X_2) : Indépendance / Le cas gaussien

On dit qu'une v.a. continue X suit une loi gaussienne (ou normale), noté $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si sa densité de probabilité vaut :

$$p_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{12}$$

La famille des distributions gaussiennes est paramétrée par μ et σ.
Exemple pour $\mu = 2$ et $\sigma = 1$.



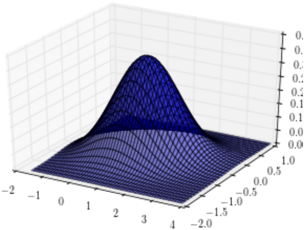
Couple de v.a. (X_1, X_2) : Indépendance / Le cas gaussien multivarié

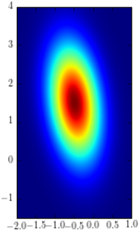
On dit qu'un vecteur aléatoire continu $\boldsymbol{X}$ suit une loi gaussienne multivariée, noté $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, si sa dentisté de probabilité jointe vaut :

$$p_X(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\mu})}. \tag{13}$$

La famille des distributions gaussiennes en dimension d est paramétrée par le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ et la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$.

Exemple pour d=2, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$.





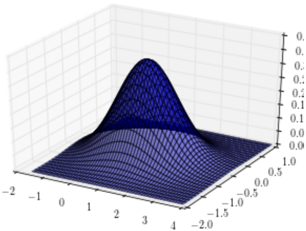
Couple de v.a. (X_1, X_2) : Indépendance / Le cas gaussien multivarié

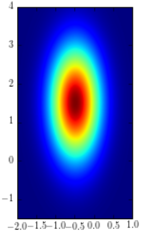
Les composantes d'un vecteur aléatoire gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1 \ldots X_d)^T$ sont indépendantes ssi la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ est diagonale.

$$p_X(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\mu})}. \tag{14}$$

Couple de v.a. (X_1, X_2) : Indépendance / Le cas gaussien multivarié

Exemple pour $d=2$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$.





Couple de v.a. (X, Y) : Indépendance

ATTENTION

Ce n'est pas parce $p_X = p_Y$ qu'on a X dépend de Y !

Avoir les mêmes probas ne signifie pas être lié d'une quelconque manière.

Exemple

X est le résultat d'un lancé de dé.
Y est le résultat d'un lancé d'autre dé.
On a $p_X = p_Y$ mais le résultat du 1er lancé est indépendant du 2ème !

Triplet de v.a. (X, Y, Z) : Indépendance conditionnelle

Définition

On dit que deux v.a.s X et Y qu'elles sont conditionnellement indépendantes sachant Z, noté $(X \perp\!\!\!\perp Y) | Z$ si la jointe sachant Z est le produit des marginales sachant Z :

$$p_{X,Y|Z=c}(A, B) = p_{X|Z=c}(A) \times p_{Y|Z=c}(B) . \tag{15}$$

Exemple

X est une v.a. binaire représentant la possibilité d'être atteint de la grippe.
Y est une v.a. binaire représentant la possibilité d'avoir de la fièvre.
Z est une v.a. binaire représentant la possibilité de souffrir de maux de tête.
X est une pathologie tandis que Y et Z sont des symptômes.
On a :

Triplet de v.a. (X, Y, Z) : Indépendance conditionnelle et Causalité

Dans l'exemple précédent :

- X est une cause,
- Y et Z sont des effets,
- Y et Z ne sont pas indépendantes, il y a de bonnes chances d'avoir $Y =$true quand $Z =$true,
- mais il n'y a pas de lien de causalité entre Y et Z.

Triplet de v.a. (X, Y, Z) : Indépendance conditionnelle

L'indépendance conditionnelle s'exprime aussi comme suit :

$$(X \perp\!\!\!\perp Y)\,|Z \;\Leftrightarrow\; p_{X|Y=b,Z=c}\,(a) = p_{X|Z=c}\,(a)\,, \forall a \in \mathbb{X}, b \in \mathbb{Y}. \tag{16}$$

Une fois Z connue, la connaissance de Y n'apporte rien concernant la valeur de X.

ATTENTION

$$(X \perp\!\!\!\perp Y)\,|Z \;\nLeftarrow\; X \perp\!\!\!\perp Y, \tag{17}$$

$$(X \perp\!\!\!\perp Y)\,|Z \;\nRightarrow\; X \perp\!\!\!\perp Y. \tag{18}$$

Plan du chapitre

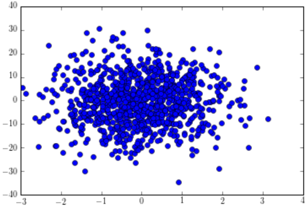
1 Probabilités

2 Statistiques

.. et les données furent !

Le mot statistique peut désigner :

- un échantillon recueilli $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ où chaque x_i est tiré selon une même loi L, noté $x_i \sim L$. Elle est représentative de la population générale.



- un calcul opéré sur une loi L ou un échantillon suivant une loi L et permettant de décrire le comportement de L.

$$s = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{n\left(p_X(j) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_j(x_i)\right)^2}{p_X(j)} \tag{19}$$

Statistique : Moments

Les moments sont les statistiques descriptives les plus répandues permettant de caractériser une distribution.

Définition

Soit X une v.a. et $\mu_X^{(i)}$ Son moment d'ordre i est donné par :

$$\mu_X^{(i)} = \mathbb{E}\left[X^i\right]. \tag{20}$$

Définition

Soit X une v.a. et $\nu_X^{(i)}$ Son moment centré d'ordre i est donné par :

$$\nu_X^{(i)} = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^i\right]. \tag{21}$$

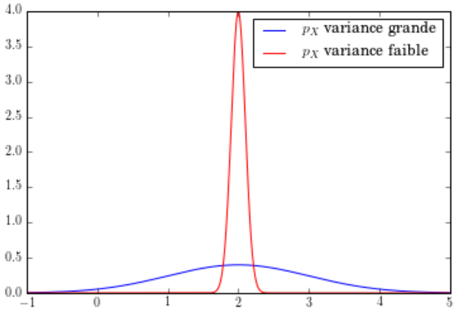
Statistique : Moments

Cas particuliers de moments centrés :

Définition

Le moment centré d'ordre 2 d'une v.a. X est appelé variance de X, notée $\mathrm{Var}[X]$.
La racine de la variance est appelée écart-type, noté $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.

La variance caractérise l'étalement d'une distribution.



Statistique : Moments

Définition

Soit X une v.a. et $\nu_X^{(i)}$ Son moment centré réduit d'ordre i est donné par :

$$m_X^{(i)} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma_X}\right)^i\right]. \tag{22}$$

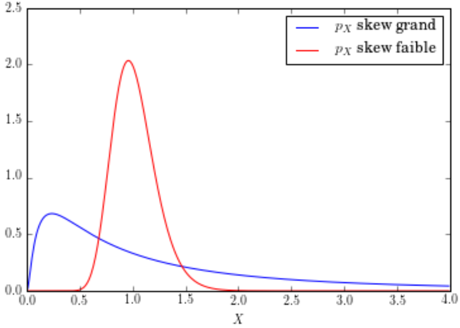
Statistique : Moments

Cas particuliers de moments centrés réduits :

Définition

Le moment centré réduit d'ordre 3 d'une v.a. X est appelé skew de X.

Le skew caractérise l'asymétrie d'une distribution.



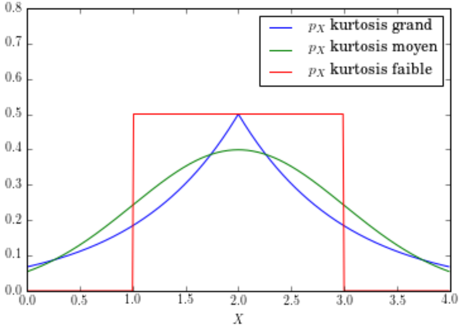
Statistique : Moments

Cas particuliers de moments centrés réduits :

Définition

Le moment centré réduit d'ordre 4 d'une v.a. X est appelé kurtosis de X.

Le kurtosis caractérise la platitude d'une distribution.



Couple de v.a. (X_1, X_2) : Covariance

En ML, on a souvent besoin de savoir si les variations d'une v.a. X sont proches de celle d'une autre v.a. Y :

- Quand X baisse est-ce que Y baisse aussi ?
- Quand X augmente est-ce que Y augmente aussi ?

Le calcul de la covariance permet de répondre en partie à cette question :

Définition

On note $\mathrm{cov}\,(X, Y)$ la covariance des v.a.s X et Y définie par :

$$\mathrm{cov}\,(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\right]. \tag{23}$$

On a :

- $\mathrm{cov}\,(X, X) = \mathrm{var}\,(X)$,
- $\mathrm{cov}\,(aX + Y, Z) = a\,\mathrm{cov}\,(X, Z) + \mathrm{cov}\,(Y, Z)$.

Couple de v.a. (X_1, X_2) : Covariance

L'indépendance entraîne une covariance nulle :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cov}\,(X, Y) = 0. \tag{24}$$

Covariance et causalité :

- Exemple des maladies et symptômes (c.f. indep. cond.).
- Les symptômes ont une covariance positive.
- La covariance n'est pas une preuve de causalité.

Attention à tous ces articles de presse du style « manger bio fait gagner 5 ans d'espérance de vie »

Couple de v.a. (X_1, X_2) : Covariance

Pour un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1 \ldots X_d)$, on appelle matrice de variance-covariance, la matrice carrée $d \times d$ définie positive $\mathbf{S}$ dont les éléments sont donnés par $S_{ij} = \mathrm{cov}\,(X_i, X_j)$.

Exercice : Prouver que la matrice de variance-covariance d'un vecteur $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}\,(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ est $\boldsymbol{\Sigma}$ (pour $d = 2$).

Couple de v.a. (X_1, X_2) : Corrélation

La corrélation est une forme normalisée de la covariance :

Définition

On note $\rho(X, Y)$ le coefficient de corrélation (de Pearson) des v.a.s X et Y défini par :

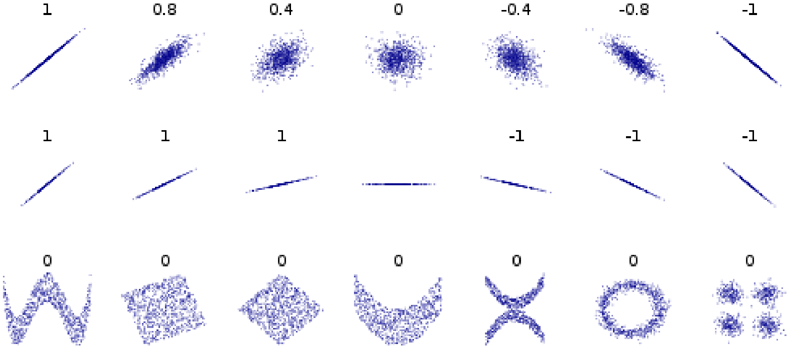
$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}}. \tag{25}$$

On a $\rho(X, Y) \in [-1; 1]$:

- $\rho(X, Y) = 1$ signifie que X et Y sont liés linéairement
- $\rho(X, Y) = -1$ signifie la même chose mais, leurs variations ont un signe opposé
- $\rho(X, Y) = 0$ ne signifie pas grand chose..

Couple de v.a. (X_1, X_2) : Covariance

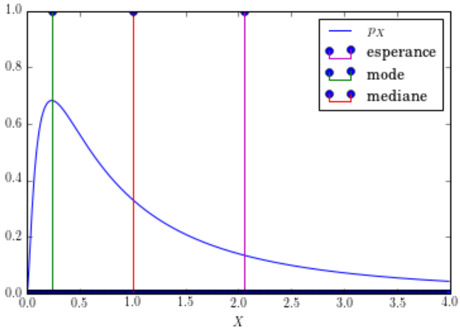
Exemples de coefficients de corrélation pour différents échantillons :



Comment résumer une distribution ?

1°/ avec un seul point

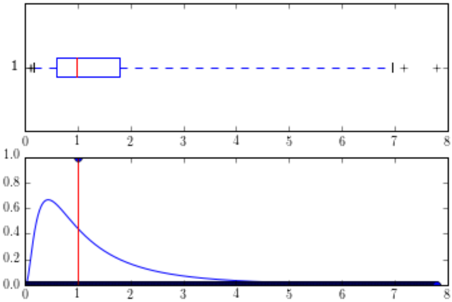
- avec l'espérance $= \mathbb{E}(X)$: c'est la valeur dont la moyenne d'un échantillon sera le plus proche,
- ou le mode $= \arg\max_{u \in \mathbb{X}} p_X(u)$: c'est la valeur la plus probable,
- ou la médiane $= F_X^{-1}(0.5)$: c'est la valeur qui sépare les autres en 2 groupes de probabilité 0.5.



Comment résumer une distribution ?

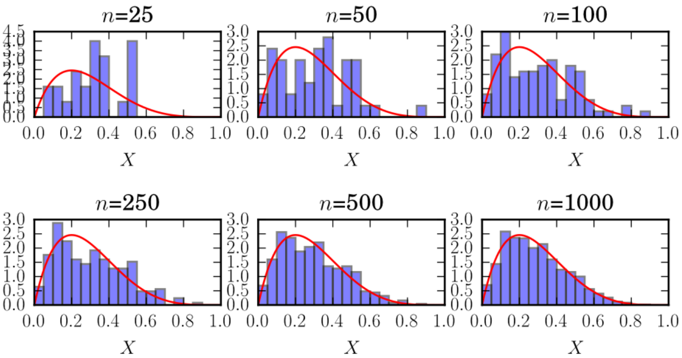
2°/ avec 5 statistiques

- la médiane $= F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$,
- et le 1er quartile $= F_X^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ et 3ème quartile $= F_X^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$,
- et le 2ème percentile $= F_X^{-1}\left(\frac{2}{100}\right)$ et 98ème percentile $= F_X^{-1}\left(\frac{98}{100}\right)$.



Comment remonter à la distribution p_X qui a généré nos données $\{x_i\}_{i=1}^{n}$?
Rangeons les données dans des cases (bins) !

- On découpe $\mathbb{X}$ en r bins (en général de taille égale).
- On pose $\hat{p}_X(A_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i}(x_i)$ (distribution empirique)
- Quand n est grand, $\hat{p}_X(A_i) \approx p_X(A_i)$.



Pourquoi ça marche ? Loi des grands nombres

- On a n données $\{x_1 \dots x_n\}$ et chacune est issue d'un tirage d'une v.a. $X_i \sim L$.
- Ces v.a.s paragent la même loi L et sont indépendantes.
- On parle d'échantillon indépendant et identiquement distribué (iid).
- Notons $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne des v.a.s correspondant aux entrées du vecteur.
- Soit μ l'espérance de L.

Théorème

En reprenant les notations ci-dessus, on a :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to +\infty} Y_n = \mu \right) = 1 \tag{26}$$

Pourquoi ça marche ? Loi des grands nombres

- Ce résultat signifie que quand n est très grand, une réalisation de Y_n ne sera plus une v.a. mais une constante égale à μ !
- Appliquons ce résultat à $\mathbf{R} = \mathbb{I}_A \circ \mathbf{X}$ avec $A \subset \mathbb{X}$. On a alors :
  - $Y_n = \hat{p}_X(A)$,
  - $\mu = \mathbb{E}_X[\mathbb{I}_A] = p_X(A)$.

A quelle vitesse converge-t-on ? Théorème Central Limite
On aimerait pouvoir garantir en fonction de n un résultat du type

$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{p}_X\left(A;n\right)-p_X\left(A\right)\right|>\tau\right)=\epsilon. \tag{27}$$

Théorème Central Limite

Soient X_1, .., X_n n v.a. indépendantes suivant une même loi L d'espérance finie μ et de variance finie non nulle σ^2. Soit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a

$$Y_n \sim \mathcal{N}\left(\mu;\frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{28}$$

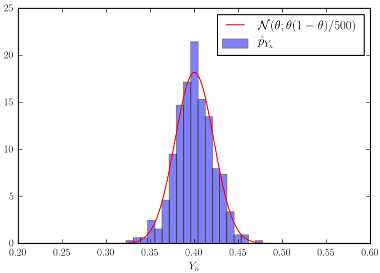
A quelle vitesse converge-t-on ? Théorème Central Limite

Exemple : soit X une variable aléatoire binaire : $\mathbb{X} = \{0; 1\}$. Il existe $\theta \in [0; 1]$ avec

$$p_X(0) = 1 - \theta, \tag{29}$$

$$p_X(1) = \theta. \tag{30}$$

On dit que X suit un loi de Bernouilli, noté $X \sim \mathrm{Ber}(\theta)$. Prenons $n = 500$ tirage de la loi $\mathrm{Ber}(\theta)$. Répétons $m = 400$ fois l'expérience et construisons alors l'histogramme de Y_n à comparer avec la distribution théorique $\mathcal{N}\left(\theta; \frac{\theta(1-\theta)}{500}\right)$.



A quelle vitesse converge-t-on ? Théorème Central Limite
Revenons à

$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{p}_X\left(A; n\right) - p_X\left(A\right)\right| > \tau\right) = \epsilon. \tag{31}$$

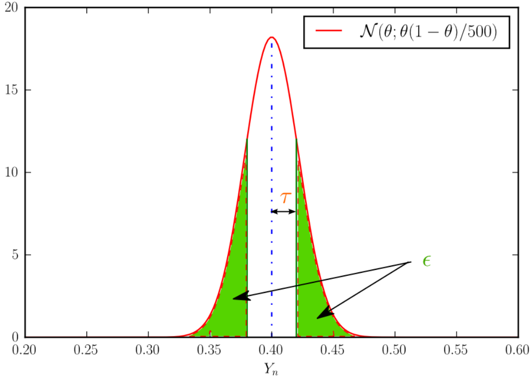
- Supposons que je tire n échantillons $\{x_1, \ldots, x_n\}$ selon la loi de X.
- La probabilité d'avoir $x_i \in A$ est $p_X\left(A\right)$.
- La probabilité d'avoir $x_i \notin A$ est $1 - p_X\left(A\right)$.
- Je peux transformer mes échantillons x_i en échantillons binaires $z_i = \mathbb{I}_A\left(x_i\right)$.
- Les z_i sont tirés selon $\mathrm{Ber}\left(\theta = p_X\left(A\right)\right)$!

A quelle vitesse converge-t-on ? Théorème Central Limite

Revenons à

$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{p}_X\left(A;n\right)-p_X\left(A\right)\right|>\tau\right)=\epsilon. \tag{32}$$

- Quand n est grand, ma probabilité ϵ correspond à la surface suivante :



Comment remonter à la distribution p_X qui a généré nos données $\{x_i\}_{i=1}^{n}$?
Supposons que p_X appartienne à une famille paramétrée $\{f_{\boldsymbol{\theta}}\}_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}$.
$\rightarrow$ On peut alors calculer la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) &= p(\mathcal{D}|\boldsymbol{\theta}), \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \tag{33}$$

ATTENTION

$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ n'est pas une distribution :

$$\int \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta} \neq 1. \tag{34}$$

En ML, on préfère souvent la *negative log-Likelihood* :
$\mathrm{NLL}(\boldsymbol{\theta}) = -\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$.

Comment remonter à la distribution p_X qui a généré nos données $\{x_i\}_{i=1}^n$?
$\rightarrow$ vraisemblance $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$.

Exemple

Soient les données suivantes $\mathbf{x}_i \sim \mathrm{Ber}(\theta)$: $\{0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 1; 0\}$.
On a $n = 10$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta) &= \prod_{i=1}^{10} \theta^{\mathbf{x}_i} (1-\theta)^{1-\mathbf{x}_i}, \\ &= \theta^3 \, (1-\theta)^7 . \end{aligned}$$